Métodos Matemáticos da Física 2017/18

Teste 1 07-04-2018

1.a) Encontre pelo método de separação de variáveis funções $u(t,x)$ que satisfazem a equação de difusão, e funções $u(t,x)$ que satisfazem a equação de Schrödinger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\,\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,.$$

b) Determine a solução da equação de difusão que obedece à condição inicial $u(0,x) = y(x)$, onde

$$y(x) = a\,\cos(kx) + b\,\sin(2kx) \,, \qquad a, b, k \in \mathbb{R} \,.$$

c) Determine a solução da equação de Schrödinger que obedece à condição inicial $u(0,x) = y(x)$, com $y(x)$ definida acima.

d) Caracterize a dependência no tempo das soluções da equação de difusão e da equação de Schrödinger encontradas nas alíneas b) e c).

2. Considere as funções $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, definidas no intervalo $-\ell \leq x \leq \ell$.

a) Calcule o produto interno de funções $\langle y_n | y_m \rangle$ para n, m arbitrários.

b) Determine a série de Fourier, $\sum_n c_n\, y_n(x)$, da função $u(x) = e^{a\,x}$, onde a é uma constante real.

c) Mostre que a série de Fourier obtida é uma função real.

3. Sejam as funções de x definidas no intervalo $[-\ell, \ell]$,

$$u(x) = e^{i\,\pi\,x/\ell} + e^{2i\,\pi\,x/\ell} \,, \qquad v(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}\, e^{i\,n\,\pi\,x/\ell} \,.$$

Calcule, justificando, os integrais

$$\int_{-\ell}^{\ell} u(x)^* v(x)\, dx \,, \qquad \int_{-\ell}^{\ell} u(x)\, v(x)\, dx \,.$$